Finance, Markets and Valuation Vol. 7, Num. 2 (July-December 2021), 38–59

Finance, Markets and Valuation

Diversificación de carteras de inversión en renta variable. Aplicación al IBEX 35

Diversification of equity investment portfolios. Application to the IBEX 35

Gema Orihuel Bañuls[1]

[1]Universitat Politècnica de València, Valencia, España. goribau@ade.upv.es

JEL: G11

Resumen

En la actualidad, no existe unanimidad acerca de qué efectos puede tener la diversificación de títulos sobre el riesgo total de una cartera de inversión. En este contexto, este trabajo estudia algunas cuestiones relativas a la evolución del riesgo en una cartera de inversión formada por acciones del IBEX 35. Adicionalmente se comprueba si conclusiones extraídas para otros periodos de tiempo y en otros mercados son aplicables en el mercado bursátil español. La metodología empleada consiste en calcular cómo se comportan los dos componentes que constituyen el riesgo total de una cartera (riesgo sistemático y riesgo no sistemático), a medida que se diversifican carteras de tamaño creciente. El estudio evidencia cómo un aumento de títulos en la cartera de inversión disminuye el porcentaje correspondiente al componente de riesgo no sistemático y aumenta el componente de riesgo sistemático. Además, también demuestra que las ventajas de la diversificación son cada vez más marginales a medida que se aumenta el tamaño de la cartera. De manera adicional, se comprueba cómo un aumento de títulos también incrementa la estabilidad de la Beta de las carteras de inversión en el tiempo.

Palabras clave: Diversificación de carteras; Gestión del riesgo; IBEX 35

Abstract

At present, there is no unanimity on the effects that stock diversification can have on the total risk of an investment portfolio. In this context, this paper studies some issues related to the evolution of risk in an investment portfolio made up of IBEX 35 stocks. In addition, it is tested whether conclusions drawn for other time periods and in other markets are applicable to the Spanish stock market. The methodology used consists of calculating how the two components that make up the total risk of a portfolio (systematic risk and unsystematic risk) behave as portfolios of increasing size are diversified. The study shows how an increase in the number of securities in the investment portfolio decreases the percentage corresponding to the unsystematic risk component and increases the systematic risk component. Furthermore, it also shows that the benefits of diversification become increasingly marginal as portfolio size

DOI: 10.46503/THQQ8876

Corresponding autor
Gema Orihuel Bañuls

Received: 29 Sep 2021
Revised: 4 Nov 2021
Accepted: 8 Nov 2021

Finance, Markets and Valuation
ISSN 2530-3163.

Cómo citar: Orihuel Bañuls, G. (2021). Diversificación de carteras de inversión de renta variable. Aplicación al Ibex 35. Finance, Markets and Valuation 7(2), 38–59. DOI: https:\\doi.org\10.46503/THQQ8876

increases. Additionally, it is shown that an increase in the number of securities also increases the stability of the Beta of the investment portfolios over time

Keywords: Portfolio diversification; Risk management; IBEX 35

1. Introducción

Los inversores en activos financieros pueden adoptar diversas estrategias de inversión, como la gestión pasiva (García *et al.*, 211 y 2013), la especulación con activos individuales (Oliver & García, 2020) o la gestión de carteras de títulos (García *et al.,* 2020 TEDE). El presente trabajo se enmarca dentro de esta última estrategia de inversión, la gestión de carteras. Una de las cuestiones clave en los mercados bursátiles, que afecta especialmente a los inversores más conservadores o adversos al riesgo, es sin duda conocer el número de títulos necesario de una cartera de inversión para poder conseguir una diversificación razonable en las carteras de inversión.

La idea de que cuanto mayor sea el número de títulos se conseguirá incrementar los beneficios de la diversificación, está en general muy extendida. Sin embargo, esta percepción de una relación directamente proporcional entre el número de títulos de una cartera y los beneficios de la diversificación es una simplificación del problema. Averiguar el número óptimo de títulos de una cartera de inversión es, sin duda, una cuestión relevante que, como se describe en el apartado siguiente, ha sido ampliamente estudiada. Esta cuestión es también importante porque al aumentar la diversificación de una cartera, se incrementan los costes de gestión y transacción, lo que disminuiría, por tanto, la eficiencia de la cartera.

El riesgo financiero se define como la desviación o incertidumbre relativa a la rentabilidad esperada de una determinada inversión en un periodo de tiempo. Esta incertidumbre viene dada por la probabilidad de que se provoquen una serie de circunstancias negativas que repercutan en los rendimientos de una inversión.

La diversificación de carteras de inversión es uno de los métodos generalmente aceptados y aplicados en los mercados financieros por parte de los inversores para reducir el riesgo financiero de su cartera. Se entiende por diversificación a la acción de invertir en distintos activos con el objetivo de minimizar el riesgo de una cartera, sin necesidad de renunciar a su rentabilidad esperada.

El primer autor en poner de relieve esta cuestión fue Harry Markowitz, que en 1952 formuló la Modern Porfolio Theory (MPT). Uno de los aspectos más importantes de su modelo fue su descripción del impacto que tiene la diversificación de una cartera sobre el riesgo (Mangram, 2013). Markowitz manifestó que el riesgo de la cartera no dependía únicamente de las varianzas individuales de los rendimientos de los títulos que forman una cartera, si no también de las correlaciones existentes entre sí. Por tanto, según el modelo de Markowitz, el riesgo de una cartera viene determinado por su volatilidad, medida mediante: la rentabilidad esperada del activo, su varianza, su desviación típica y las covarianzas existentes entre los títulos que la forman. Una desviación típica mayor, indica mayor riesgo y requiere una rentabilidad esperada también mayor. En resumen, en el modelo de Markowitz una cartera es eficiente cuando se optimiza su binomio media-varianza.

A raíz del estudio de Markowitz (1952), surgieron otros modelos que contribuyeron a expandir los conceptos del *Modern Porfolio Theory* (MPT). Entre ellos destacan los desarrollados por William Sharpe que resultan clave para entender este trabajo. Tal y como introdujo William Sharpe (1964) en su Modelo de Mercado o

Modelo de Sharpe, el riesgo total de un activo se divide en dos componentes: riesgo no sistemático o diversificable y riesgo sistemático o no diversificable. El riesgo no sistemático o diversificable consiste en el riesgo específico de un activo, asociado a las condiciones de una empresa en particular y no correlacionado con los movimientos generales del mercado. Este riesgo puede reducirse significativamente a través de la diversificación ya que, incorporando un número mayor de títulos en la cartera, se elimina el peso de su riesgo individual sobre el total. Sin embargo, por muchos títulos que se incluyan en una cartera, este tipo de riesgo nunca puede eliminarse completamente porque las rentabilidades de los activos que conforman una cartera siempre estarán correlacionadas en mayor o menor medida. Por su parte, el riesgo sistemático o no diversificable**,** también conocido como riesgo de mercado, es común a todas las empresas puesto que se origina por factores macroeconómicos, y tiene efecto sobre ellas, ya sea en mayor o menor medida. Algunos de estos factores son las tasas de interés, el desempleo o la inflación. Constituye la parte del riesgo total de una acción que no se puede eliminar mediante la diversificación y, por lo tanto, es inherente a la misma

El objetivo principal de este trabajo es evaluar la evolución promedio del riesgo sistemático (y, por tanto, el no sistemático) a medida que aumenta la cardinalidad de las carteras con la intención de comprobar cómo los beneficios de incrementar la diversificación empiezan a ser marginales conforme la inclusión de nuevos títulos se va acercando al mayor valor de N.

El estudio que se presenta a continuación se estructura de la siguiente manera. En la siguiente sección se presenta la revisión de la literatura. En la sección 3 se muestran las ecuaciones que definen el riesgo sistemático y el no sistemático y se describe la metodología. La sección cuarta comenta el proceso de selección de los datos que se emplean en el estudio. La siguiente sección presenta y discute los resultados obtenidos. Finalmente, la sexta sección recoge las principales conclusiones del trabajo.

2. Revisión de la literatura

Son varios los autores que han estudiado a lo largo del tiempo los beneficios de la diversificación de carteras y, aunque la mayoría llegó a la conclusión de que invertir en 10-15 títulos era suficiente para conseguir una diversificación razonable, existen opiniones dispares.

Evans y Archer (1968), fueron de los primeros autores en estudiar qué número de acciones a incluir en una cartera de inversión podría ser el óptimo a la hora de eliminar su riesgo. Es decir, a partir de cuantos títulos dejaba de ser beneficioso diversificar. Este estudio lo realizaron con 470 títulos del índice Standard & Poors en el año 1958. Dado que su conclusión tamaño-riesgo resultó ser un número relativamente pequeño, de 10 títulos concretamente, varios autores decidieron analizar dicha cuestión a partir de este estudio.

Por un lado, Solnik (1974) decidió utilizar el método aplicado por Evans y Archer (1968) para estudiar los beneficios que pudieran surgir a partir de la diversificación internacional. Tras componer de manera aleatoria varias carteras compuestas entre 1 y 50 títulos, también llegó a la conclusión de que con una cartera compuesta por 10-15 títulos, se llegaba a eliminar un 90% del riesgo diversificable o no sistemático. Sin embargo, también puso de relieve las diferencias que podían existir entre países debido a factores económicos, ya que, por ejemplo, los beneficios de la diversificación no eran los mismos en Alemania que en Francia.

Wagner y Lau (1971) demostraron que una cartera formada por 100-200 títulos, eliminaba entre un 81% y un 96% el riesgo diversificable, mientras que una formada únicamente por 20, ya llegaba a eliminar entre el 80-90%.

Por otro lado, contradiciendo a estos autores, Statman (1987) afirmaba que se necesitan incluir entre 30 y 40 títulos para considerar que una cartera está bien diversificada.

Además, una aportación importante a la medida de riesgo es el modelo que utilizaron Surz y Price (2000). Estos autores basaron su estudio en el que previamente habían desarrollado Fisher y Lorie (1970) para la New York Stock Exchange (NYSE) entre los años 1926-1965, según el cual el 95% de los beneficios de la diversificación se conseguían invirtiendo en una cartera de 30 títulos. Statman (1987) coincide con ellos que se necesitan incluir entre 30 y 40 títulos para considerar que una cartera está bien diversificada. Sin embargo, Surz y Price (2000) cuestionaron que los cálculos realizados por estos autores fueran del todo adecuados y volvieron a realizar los cálculos sobre acciones de la NYSE en el periodo entre 1986-1999. Así pues, Fisher y Lorie evaluaban únicamente la reducción del riesgo total medida por la desviación típica, sin diferenciar entre sistemático y no sistemático. Surz y Price (2000) repitieron sus cálculos utilizando el R^2 y el tracking error como medida de riesgo no diversificable. Finalmente llegaron a la conclusión de que, aunque sus resultados relativos a la reducción de la desviación típica eran similares a los de Fisher y Lorie, los beneficios de la diversificación eran menores de los pensados inicialmente. Por ejemplo, una cartera compuesta por 15 títulos conseguía una diversificación del 93% según Fisher y Lorie mientras que para Surz y Price este porcentaje se reducía al 76%. Por tanto, según ellos, ni 30 ni 60 títulos podían alcanzar una diversificación del 95%.

No obstante, más adelante, la conclusión de Tang (2004), similar a la de Wagner y Lau (1971), fue que, para una población infinita de títulos, una cartera compuesta por 20 ya eliminaba el 95% del riesgo no sistemático, mientras que para llegar al 99% se necesitaba añadir 80 títulos más. Sin embargo, para una población finita, se necesitarían menos títulos para alcanzar una diversificación razonable. Aunque de manera distinta, Tang (2004) sí que diferencia entre riesgo sistemático y no sistemático para realizar sus cálculos, sin embargo, sus resultados difieren de los de Surz y Price (2000).

3. Metodología

A continuación, se detalla el procedimiento seguido en el cálculo del porcentaje de riesgo sistemático de cada cartera ya que, como se ha mencionado al principio, a partir de este se obtiene el porcentaje de riesgo no sistemático, que es el restante.

Una manera de obtener el riesgo sistemático de una cartera compuesta por N títulos, es calculando su Coeficiente de Determinación o R^2, que se define estadísticamente como el porcentaje de variación de una variable se explica a partir de otra. Trasladado su significado a la aplicación en este trabajo, R^2 indicaría en qué porcentaje el comportamiento del riesgo de un título viene explicado por el riesgo del mercado.

Para un inversor serán más interesantes aquellos títulos que tengan mayor R^2 y, en consecuencia, mayor riesgo sistemático, ya que es el único componente de riesgo que remunera el mercado. El R^2 puede tomar valores que expresados en números enteros estarían entre 0 y 1 o, de manera equivalente, entre 0-100%. Por lo tanto, cuanto más se acerque el valor del R^2 al 100% o al 1, más ajustado es el comportamiento del título frente al del mercado.

El valor de R^2 mediante un análisis de regresión simple se calcula como cuadrado de la correlación entre la cartera P y el índice de referencia Y (en este caso el IBEX 35). Analíticamente, R^2 es el cuadrado del Coeficiente de Correlación de Pearson (ρ_{YP}) :

$$R^2 = {\rho_{YP}}^2 = \ riesgo\ sistemático \tag{1}$$

El Coeficiente de Correlación indica el grado de relación existente entre dos variables, pero su valor puede variar de -1 a +1, siendo +1 una correlación perfecta positiva, y -1 una correlación perfecta negativa. Sin embargo, como se ha expuesto anteriormente, R^2 expresa la proporción del comportamiento de una variable respecto de otra.

La correlación de las distintas carteras con el mercado se obtiene con la siguiente expresión:

$$\rho_{YP} = \frac{\sigma_{YP}}{\sigma_Y \sigma_P} \tag{2}$$

Donde:

σ_{YP} es la covarianza entre el IBEX 35 y la cartera de inversión.

$\sigma_Y \sigma_P$ son las desviaciones típicas de la cartera de inversión y el IBEX 35, respectivamente.

Para llegar a esta expresión, primero se debe comprender cómo se obtiene la varianza de la cartera, a partir de la cual se calcula su desviación típica, y la covarianza entre ésta y el índice bursátil IBEX 35.

La varianza de una cartera formada por más de un título depende de la varianza individual de estos y de cómo el comportamiento de unos varía en función de otros, es decir, su correlación. Así pues, se calcula como la suma de la varianza de cada uno de los títulos y dos veces cada covarianza existente entre los títulos que forman la cartera (donde N es el número de títulos que forman la cartera). Se expresaría de la siguiente manera:

$$\sigma_P^2 = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + .. + \sigma_n^2 + 2\sigma_{12} + 2\sigma_{13} + \cdots + 2\sigma_{15} + 2\sigma_{24} + \cdots + 2\sigma_{25} + \cdots + 2\sigma_n}{N^2} \tag{3}$$

Para simplificar esta expresión en Excel, el numerador se ha calculado como: $1^t V 1$ donde V es la matriz de varianzas-covarianzas de todas las combinaciones de rendimientos posibles.

Para el cálculo de la covarianza σ_{YP}, que constituye el numerador de la expresión de la correlación, se ha utilizado la siguiente regresión lineal:

$$\sigma_{YP} = \frac{\sum (Y_i - \bar{Y})(P_i - \bar{P})}{n} = \frac{\sum (Y_i - \bar{Y})\left(\frac{x_i^1 + x_i^2}{2} - \frac{\overline{x^1} + \overline{x^2}}{2}\right)}{n} =$$

$$\frac{\sum(Y_i-\bar{Y})\left(\frac{x_i^1-\overline{x^1}}{2}+\frac{x_i^2-\overline{x^2}}{2}\right)}{n}=\frac{\sum(Y_i-\bar{Y})\left(\frac{x_i^1-\overline{x^1}}{2}\right)}{n}+\frac{\sum(Y_i-\bar{Y})\left(\frac{x_i^2-\overline{x^2}}{2}\right)}{n} \tag{4}$$

De manera simplificada, se calcularía como el promedio de las covarianzas del índice con cada uno de los títulos que forman la cartera. Es decir:

$$\frac{1}{n}(\sigma_{YX^1}+\sigma_{YX^2}+..+\sigma_{YX^n}) \tag{5}$$

Volviendo al inicio, una vez calculado el Coeficiente de Correlación, se eleva al cuadrado y se obtiene finalmente el R^2.

$$R^2=\rho_{YP}{}^2=\left(\frac{\sigma_{YP}}{\sigma_Y\sigma_P}\right)^2=\frac{\sigma_{YP}{}^2}{\sigma_Y\sigma_P{}^2}=riesgo\ sistemático \tag{6}$$

Tras el cálculo del R^2, que indica el porcentaje que el riesgo sistemático constituye sobre el total de riesgo de la cartera, se calcula el riesgo no sistemático. Como el riesgo total, cuyo valor sería del 100% o, presentado en forma de número entero de 1, es la suma del riesgo sistemático y no sistemático, el cálculo del riesgo no sistemático se ha realizado de la siguiente manera:

$$1-R^2=riesgo\ no\ sistemático \tag{7}$$

Por otro lado, como se observará en el siguiente apartado, para obtener de manera individual el riesgo sistemático y no sistemático de las empresas que forman las distintas carteras se han utilizado las fórmulas del modelo CAPM. Este método también sería aplicable al cálculo del riesgo en las carteras formadas por varios títulos y ha servido como comprobación de los resultados obtenidos por regresión lineal.

4. Selección de los datos

Uno de los conceptos a prestar atención en este trabajo es el entendimiento del papel de los índices bursátiles en los cálculos de los distintos modelos. El papel fundamental de un índice bursátil es dar una percepción general de cómo se comporta el mercado. Por lo tanto, a la hora de calcular la rentabilidad o riesgo de un mercado de valores, siempre se utiliza un índice bursátil como referencia de este.

En el estudio se ha utilizado el índice bursátil por excelencia del mercado español: el IBEX 35. Este índice está formado por las 35 empresas con más liquidez que cotizan en las cuatro bolsas españolas (Madrid, Valencia, Barcelona y Bilbao) a través del Sistema de Interconexión Bursátil Español (SIBE). Estas empresas pertenecen a distintos sectores entre los que encontramos: Energético, Financiero, Inmobiliario, Tecnología y Telecomunicaciones y Construcción. Además, la composición de este índice varía ligeramente en el tiempo ya que las empresas que lo integran, elegidas dos veces al año por el Comité Asesor Técnico (CAT), han de cumplir una serie de requisitos de capitalización, liquidez, o volumen de negocio entre otros. Todo ello comporta que produzcan entradas y salidas continuamente (Banco Santander, s.f)

Cabe destacar que el IBEX 35 es un índice ponderado por capitalización bursátil. La correspondiente a cada empresa resulta de la multiplicación del número de acciones de una empresa por el valor de cotización de esta.

En cuanto a su cálculo, la cotización a tiempo real del IBEX 35 se obtiene multiplicando el valor del índice en la sesión anterior por un porcentaje que resulta de dividir la suma total de las capitalizaciones de todas las empresas que lo forman entre las mismas del día anterior. A esto se le suma un valor de ajuste (*J*) por posibles operaciones financieras o ampliaciones de capital (Bolsa de Madrid, 2021).

La fórmula se expresa de la siguiente manera:

$$IBEX\ 35\ (t) = IBEX\ 35\ (t-1) * \frac{\sum_{i=1}^{35} Cap_i(t)}{\sum_{i=1}^{35} Cap_i(t-1) \pm J} \qquad (8)$$

El periodo escogido para la realización de este estudio es de 12 años, desde el 2009 hasta el 2020. Como se ha comentado anteriormente, en el IBEX 35 se producen continuamente entradas y salidas de distintas empresas y, por tanto, para poder hacer un análisis de manera correcta, en lugar de 35, se ha trabajado con las 28 empresas que se han mantenido en el índice durante ese periodo de tiempo.

A continuación, como presentación previa a la formación aleatoria de carteras, se muestra una tabla en la que se ha calculado durante todo el periodo escogido las β de las 28 empresas y el porcentaje de riesgo sistemático y no sistemático de cada una a partir del modelo de valoración CAPM. Como se ha mencionado en la metodología, el riesgo de los títulos individuales se ha calculado de manera diferente al riesgo de las carteras aleatorias.

Tomando la expresión del riesgo total presentada por Sharpe (1964):

$$\sigma_i^2 = \beta^2 \sigma_M^2 + \sigma_{ei}^2 \qquad (9)$$

El porcentaje de riesgo sistemático sobre el total en cada acción se ha calculado de la siguiente manera:

$$\frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2} = \frac{\beta^2 \sigma_M^2}{\sigma_i^2} + \frac{\sigma_{ei}^2}{\sigma_i^2} = 1 \qquad (10)$$

Por otro lado, cabe recordar que el cálculo de las Betas según estos modelos de valoración es:

$$\beta = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma^2{}_M} \qquad (11)$$

Cómo también se ha explicado con anterioridad, el riesgo no sistemático se ha calculado con la expresión: $1 - R^2 = \text{Riesgo no sistemático}$

Ordenadas de mayor a menor por nivel riesgo, cabe resaltar cómo BBVA estaría clasificada como la empresa más agresiva a los movimientos del mercado con una β

promedio de 1,532 y un riesgo sistemático del 83,5% frente al 16,5% de riesgo específico o no sistemático.

Por el contrario, VISCOFAN, sería la acción más defensiva ya que su β promedio es de 0,022 siendo su riesgo sistemático del 1% frente al 99% de riesgo individual de la empresa.

Tabla 1. Valores del Ibex 35 ordenados de mayor a menor valor del parámetro β. Cálculo del riesgo sistemático y no sistemático individual de cada acción

Empresa	Beta (β)	varp IBEX	varp ei	Riesgo sistem.	Riesgo no sistem.
BBVA	1,532	0,004	0,01	0,835	0,165
MEL	1,511	0,004	0,015	0,571	0,429
SAN	1,471	0,004	0,01	0,789	0,211
SLR	1,328	0,004	0,036	0,177	0,823
SAB	1,32	0,004	0,013	0,473	0,527
CABK	1,241	0,004	0,01	0,588	0,412
MAP	1,204	0,004	0,008	0,632	0,368
BKT	1,198	0,004	0,01	0,537	0,463
REP	1,035	0,004	0,007	0,572	0,428
TEF	1,003	0,004	0,006	0,631	0,369
IBEX	1	0,004	0,004	1	0
ACX	0,948	0,004	0,008	0,394	0,606
FER	0,935	0,004	0,007	0,476	0,524
SGRE	0,92	0,004	0,015	0,204	0,796
ELE	0,895	0,004	0,013	0,219	0,781
COL	0,884	0,004	0,016	0,177	0,823
ANA	0,856	0,004	0,007	0,359	0,641
NTGY	0,839	0,004	0,005	0,473	0,527
IDR	0,828	0,004	0,007	0,364	0,636
IBE	0,787	0,004	0,005	0,502	0,498
CIE	0,779	0,004	0,007	0,298	0,702
PHM	0,751	0,004	0,021	0,096	0,904
ITX	0,673	0,004	0,004	0,394	0,606
ENG	0,656	0,004	0,004	0,36	0,64
FDR	0,584	0,004	0,01	0,123	0,877
REE	0,552	0,004	0,003	0,371	0,629
ALM	0,464	0,004	0,009	0,083	0,917
GRF	0,318	0,004	0,006	0,059	0,941
VIS	0,022	0,004	0,003	0,001	0,999

5. Resultados y discusión

Debido a que únicamente disponemos de 28 acciones, a la hora de realizar el análisis de carteras formadas por N = 1 título, no es necesario calcular 100 carteras y se han calculado los datos promedio de las 28 carteras individuales. Por un lado, el riesgo sistemático promedio es del 38,4% frente a un riesgo no sistemático del 61,6%. Además, la dispersión existente en el promedio de los datos, medida por la desviación típica, es de 0,24.

Tal y como puede observarse en la Figura 1, la variabilidad de resultados es muy elevada, aunque se concentran levemente en dos picos donde el 21% de las empresas presentan un riesgo sistemático entre el 30-40% y el 18% de las empresas presentan un riesgo sistemático entre 50-60%.

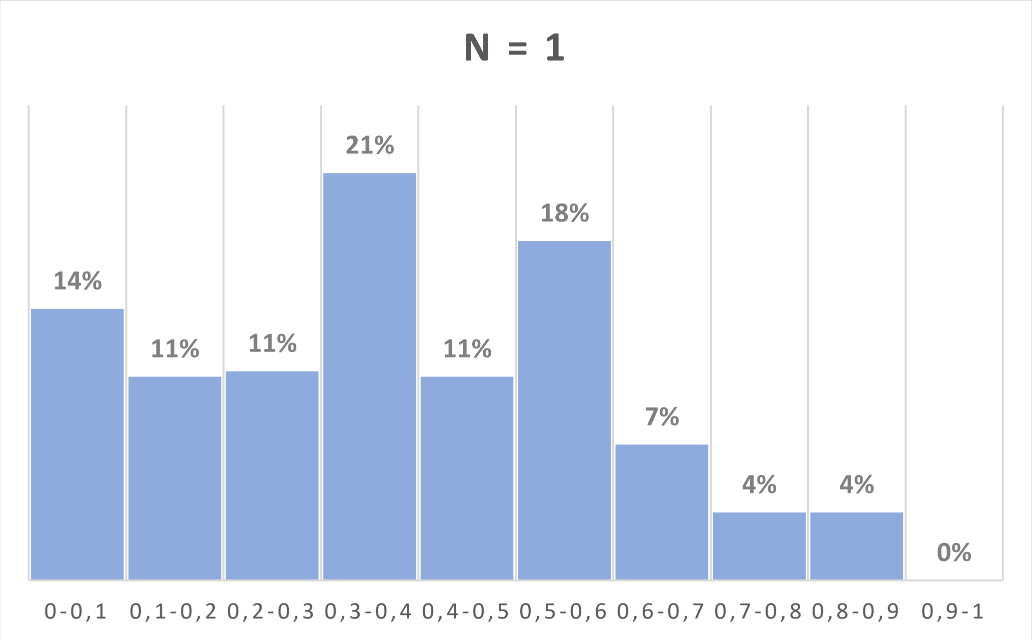

Figura 1. Distribución del riesgo sistemático en una escala de 0-1 de 28 carteras de inversión formadas por N = 1 títulos

Tras el cálculo de 100 carteras formadas aleatoriamente por N = 2 títulos, a partir del coeficiente de correlación se ha obtenido un promedio de riesgo sistemático o R^2 del 52% y de riesgo específico o diversificable del 48%.

Por otro lado, la dispersión existente en el promedio de los datos, medida por la desviación típica, es de 0,170. Cómo puede observarse en el Gráfico 2, esta dispersión es muy elevada ya que la cartera número formada por PHARMAMAR (PHM) Y GRIFOLS (GRF) presenta un riesgo sistemático de únicamente el 13% mientras que el 87% de su riesgo es específico. En el extremo contrario, la cartera formada por MAPFRE (MAP) y BBVA, presenta un riesgo sistemático del 86% frente a un riesgo específico del 14%. Cabe destacar que, tal y como muestra la Tabla 1, tanto MAPFRE como BBVA se clasifican como títulos agresivos ya que sus Betas indican que sobre reaccionan a los movimientos del mercado, y por ello, el riesgo sistemático de una cartera formada por estos dos títulos es tan elevado. Por otro lado, tanto PHARMAMAR (PHM) como GRIFOLS (GRF) pueden clasificarse como títulos defensivos a los movimientos del mercado, por lo consiguiente, la cartera formada por estas dos empresas presenta un riesgo sistemático mucho menor.

Como análisis global, 60 de las 100 carteras presentan un riesgo sistemático de entre el 40%-60%.

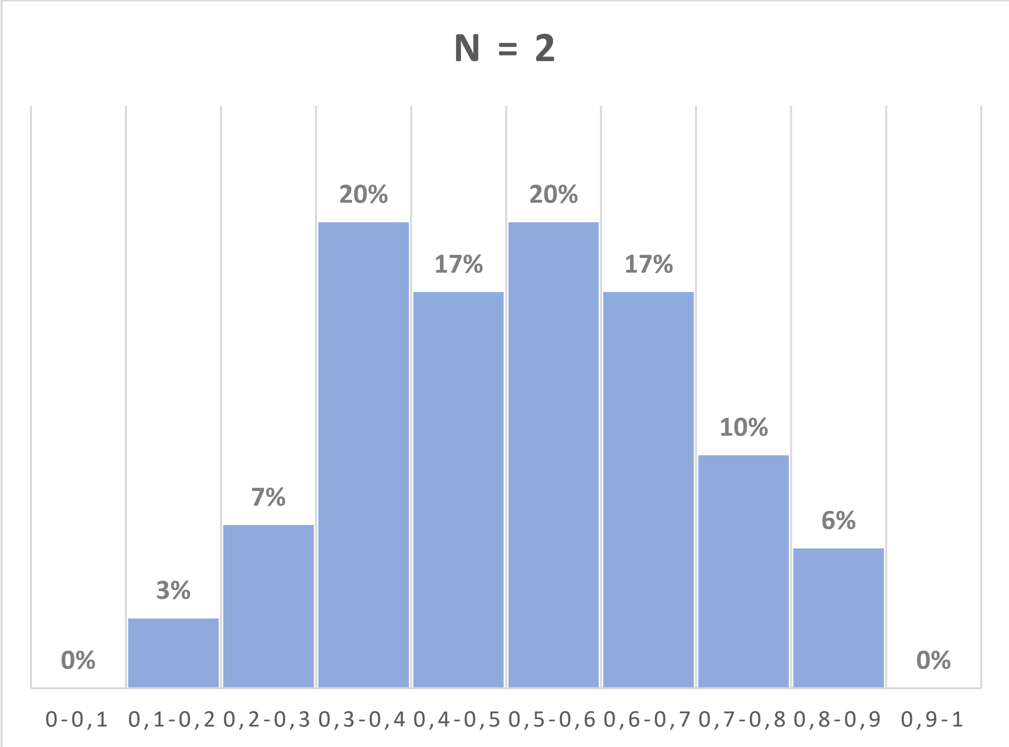

Figura 2. Distribución del riesgo sistemático en una escala de 0-1 de 28 carteras de inversión formadas por N = 2 títulos

Respecto a las 100 carteras formadas por N = 5 títulos, se ha obtenido un promedio de riesgo sistemático o R^2 del 0,673 y de riesgo específico o diversificable del 0,327.

Por otra parte, la dispersión medida por la desviación típica, es de 0,12. La cartera que presenta un mayor riesgo sistemático es la número 54 formada por CAIXABANK (CABK), IBERDROLA (IBE), TELEFONICA (TEF), ACERINOX (ACX) y SANTANDER (SAN). Así pues, el riesgo sistemático es del 92% frente a un 8% de riesgo específico. En el lado opuesto, la cartera número 29 es la de menor riesgo sistemático, con un 34%, siendo su riesgo específico el 66% del total. Está formada por VISCOFAN (VIS), PHARMAMAR (PHM), ACERINOX (ACX), SOLARIA (SLR) y ALMIRALL (ALM). En el Gráfico 3, puede observarse como los datos empiezan a confluir levemente en comparación con los de las carteras formadas por N=2 títulos. La gran mayoría, 72 de las 100 carteras, tienen un riesgo de mercado de entre el 50% y 80%, 27 de ellas entre el 60% y 70%.

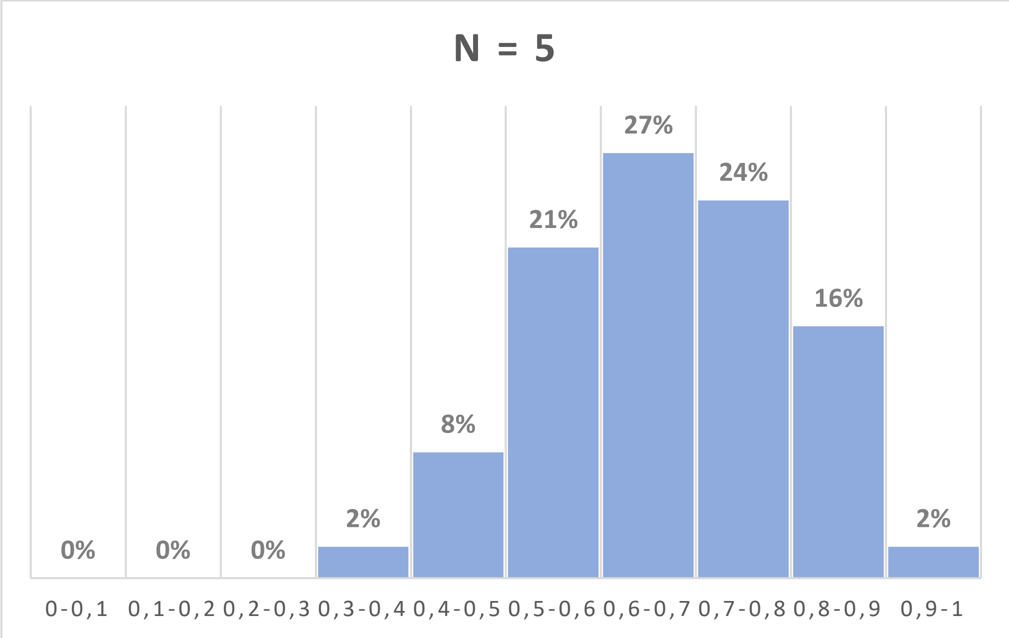

Figura 3. Distribución del riesgo sistemático en una escala de 0-1 en carteras de inversión formadas por N = 5 títulos

En lo referente a las carteras formadas por N = 10 títulos, el promedio de riesgo sistemático o R^2 asciende al 0,77 y el riesgo específico al 0,223.

Por otro lado, en la formación de carteras aleatorias, la que presenta mayor riesgo sistemático, y está casi diversificada al 100% es la cartera formada por SANTANDER (SAN), INDITEX (ITX), AENA (ANA), RED ELÉCTRICA (REE), REPSOL (REP), SIEMENS GAMESA RENEWABLE ENERGY (SGRE), MELIÁ HOTELS (MEL), FERROVIAL (FER), CAIXABANK (CABK) y BANKINTER (BKT). Esta cartera presenta un riesgo sistemático del 97% y únicamente un 3% de riesgo específico o no diversificable. Por el contrario, la cartera con menor riesgo sistemático o R^2 es la formada por INMOBILIARIA COLONIAL (COL), GRIFOLS (GRF), MAPFRE (MAP), SIEMENS GAMESA RENEWABLE ENERGY (SGRE), ALMIRALL (ALM), VISCOFAN (VIS), AENA (ANA), PHARMA MAR (PHM), FLUIDRA (FDR), y CIE AUTOMOTIVE (CIE). El riesgo sistemático de esta cartera es del 55% mientras que su riesgo específico es del 45%. Por último, cabe señalar que la desviación típica de los resultados sigue disminuyendo hasta el 0,070. En el Figura 4 se puede advertir que la dispersión se va reduciendo a medida que van aumentando los títulos, y 85 de las carteras presentan un riesgo sistemático de entre el 70% y 80%.

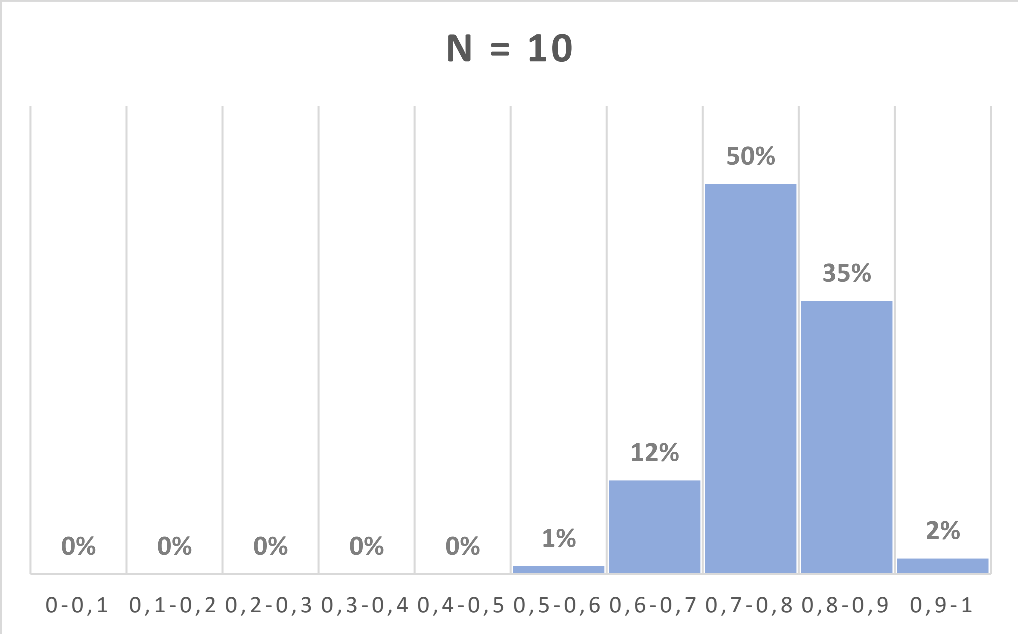

Figura 4. Distribución del riesgo sistemático en una escala de 0-1 en carteras de inversión formadas por N = 10 títulos

Por último, en este apartado las 100 carteras formadas aleatoriamente por N = 15 títulos presentan un promedio de riesgo sistemático del 0,814 y un riesgo diversificable o específico del 0,186. En este caso, la cartera con mayor riesgo sistemático es la número 55 formada por ACERINOX (ACX), NATURGY (NTGY), SANTANDER (SAN), REPSOL (REP), BBVA, INDITEX (ITX), AENA (ANA), MAPFRE (MAP), FLUIDRA (FDR), CAIXABANK (CABK), ENAGAS (ENG), ALMIRALL (ALM), TELEFONICA (TEF), BANKINTER (BKT) y RED ELECTRICA (REE). El porcentaje del total de riesgo se distribuye en un 92% del riesgo sistemático y un 8% de riesgo específico. Por otro lado, la cartera de menor riesgo sistemático es la número 67 con ENDESA (ELE), FERROVIAL (FER), FLUIDRA (FDR), INMOBILIARIA COLONIAL (COL), RED ELECTRICA (REE), IBERDROLA (IBE), BBVA, PHARMAMAR (PHM), ENAGAS (ENG), CAIXABANK (CABK), TELEFONICA (TEF), ACERINOX (ACX), VISCOFAN (VIS), cuyo riesgo sistemático representa el 63% del total frente al 37% de riesgo no sistemático.

En esta ocasión podemos ver que, en la mayoría de las carteras, en 91 concretamente, el riesgo sistemático representa el 70%-90% del riesgo total, y en 64 de ellas este riesgo representa el 80-90% del total. Por lo tanto, como cabe esperar, la desviación típica disminuye ligeramente respecto a las carteras N = 10 hasta 0,057.

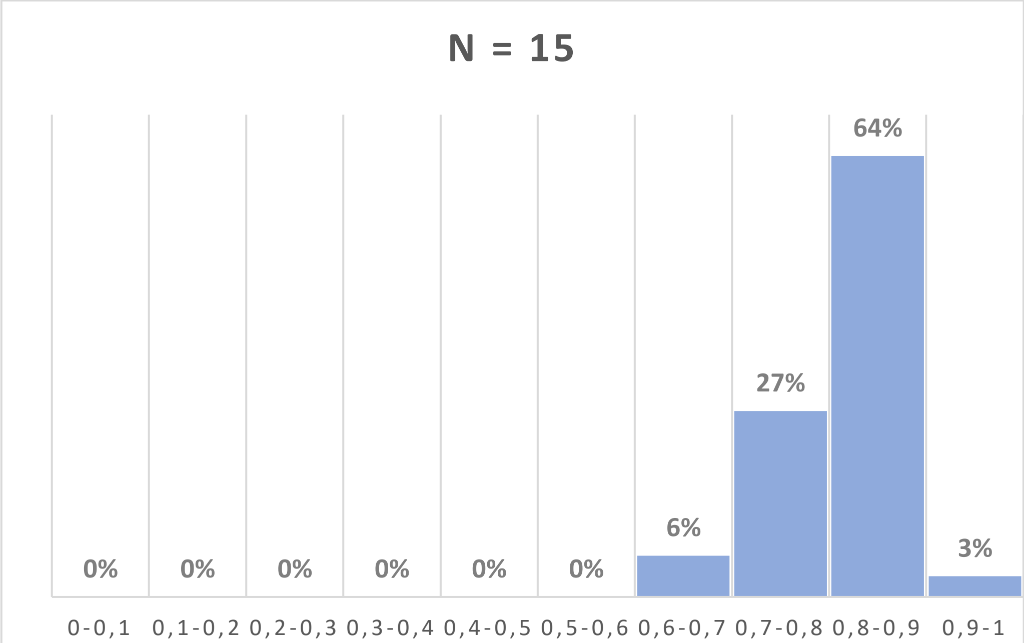

Figura 5. Distribución del riesgo sistemático en una escala de 0-1 en carteras de inversión formadas por N = 15 títulos

La Figura 6 ilustra de manera conjunta cómo se distribuyen los datos de las distintas carteras en función de la proporción que representa el riesgo sistemático en el total de riesgo. Como puede apreciarse, a medida que aumentan los títulos, la curva que muestra la distribución de los datos se torna más estrecha y tal y cómo hemos comentado anteriormente, la dispersión disminuye considerablemente. Esto también viene indicado por la desviación típica, cuyo valor disminuye desde el 0,17 en carteras de N = 2 títulos, al 0,057 en carteras formadas por N = 15.

Destaca el hecho de que el número de carteras perfectamente diversificadas no varía en gran medida entre las carteras N = 5 y las carteras N = 15. Así pues, a partir de carteras formadas por N = 5 títulos, el porcentaje de carteras cuyo riesgo sistemático representa un 90-99% del riesgo total, y por lo consiguiente, consiguen eliminar de manera casi completa el riesgo específico, se mantiene prácticamente invariable, constituyendo un 2-3% del total de carteras. Podemos por tanto afirmar que los beneficios de la diversificación en una población finita de 28 títulos empiezan a agotarse en carteras de N = 15 títulos.

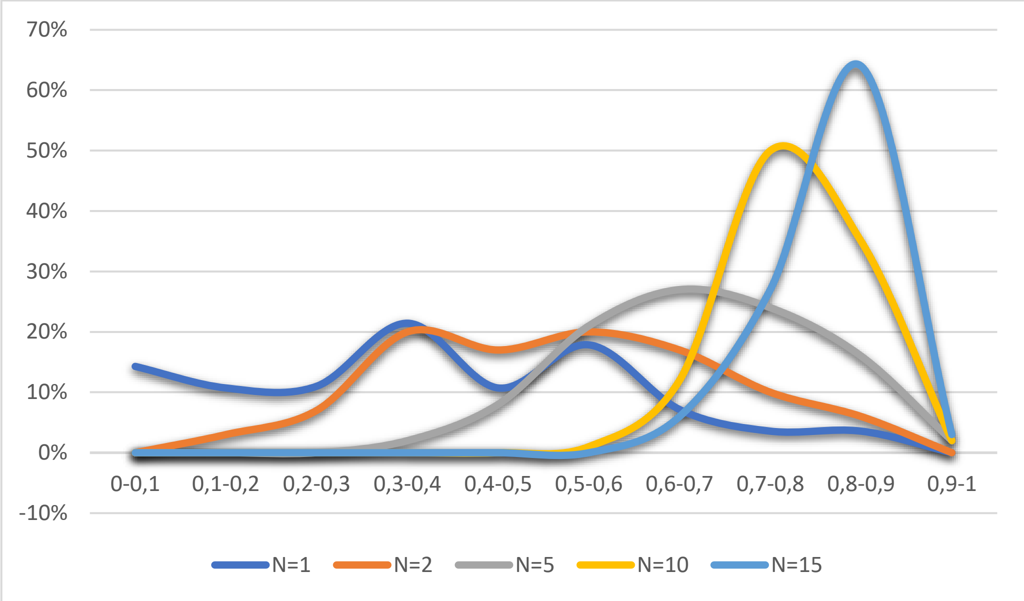

Figura 6. Comparación de la dispersión del riesgo sistemático en carteras de inversión con tamaños N = 1, N = 2, N = 5, N = 10 y N = 15

A la vista de estos resultados, en primer lugar, cabe comentar que Tang (2004) afirmaba en su estudio que, para eliminar el 50% del riesgo no sistemático, bastaba con formar una cartera con 2 títulos independientemente del tamaño de la población. Como hemos podido observar en el desarrollo del trabajo, con una cartera formada por N = 2 títulos se conseguía que, en el total del riesgo, el 50% de riesgo fuera sistemático o de mercado. Por tanto, podría afirmarse que la conclusión de Tang (2004) sobre este aspecto es correcta y aplicable en este caso.

En el caso de carteras formadas por N = 5, Tang (2004) concluyó que para conseguir una diversificación del 75% en una población de entre 20 y 40 títulos, únicamente se necesitaba invertir en 3-4 títulos. Sin embargo, los resultados obtenidos para esta población concreta disienten en este aspecto ya que, aunque se llega a eliminar de promedio un 67,3% del riesgo en carteras formadas por N = 5 títulos, no se llega a obtener ese nivel de diversificación y, tal y como muestra el histograma, (ver Figura 3) menos de la mitad de las carteras, 42 en concreto, llegan a alcanzarlo.

Además, según Tang (2004), las carteras de N = 10 en una población finita de entre 20 y 40 títulos ya deberían de haber eliminado el 95% del riesgo diversificable. Sin embargo, como ya se ha comentado previamente, solo un 2% de las carteras consiguen una diversificación por encima del 90%.

Por otro lado, aunque los valores no concuerden con los obtenidos por Tang (2004) y el resto de los autores, si que se coincide en las conclusiones generales.

Se ha observado que al diversificar las carteras a medida que aumentamos los títulos, el riesgo específico se va eliminando y el sistemático o de mercado va aumentando, tal y como se planteaba en los objetivos al inicio de este trabajo. La reducción marginal de riesgo, sin embargo, es cada vez menor a medida que se aumenta el número de títulos. Así pues, entre carteras de N = 1 y N = 2 títulos, el porcentaje de riesgo de mercado sobre el total aumenta en un 33,93%. Si aumentamos 5 títulos, de N = 5 a N = 10, eliminamos un 15,51% más de riesgo diversificable mientras que, si aumentamos 5 más, entre las carteras de N = 10 y N = 15, se elimina únicamente un 4,72%.

Además, las conclusiones que podrían extraerse del mercado español son similares a las de Solnik (1974), que ponía de relieve que independientemente del tamaño de la población una cartera de 10-15 títulos eliminaba un 90%. Como se ha desarrollado en el punto anterior, más de la mitad de los títulos en carteras formadas por N = 15 títulos consiguen diversificar entre el 80-90% del riesgo.

Volviendo a la literatura anterior, se va a comprobar en qué medida difieren los resultados que ofrecería el método con el que Fisher y Lorie (1970) calcularon los beneficios de la diversificación y comparar los resultados que arrojarían su modelo, de haberse aplicado.

Como se ha mencionado en el Marco Teórico de este trabajo, y como hicieron Fisher y Lorie (1970) en su trabajo, o Evans y Archer (1968) en la mayoría de libros y estudios, el riesgo total (formado por riesgo sistemático y no sistemático) suele representarse gráficamente como la desviación típica de la cartera y el riesgo sistemático como una constante que equivale al riesgo de mercado, en este caso, la desviación típica del IBEX 35. Con los datos que se tienen del modelo, el riesgo total dividido entre sistemático y no sistemático de las carteras analizadas quedaría representado de la siguiente manera:

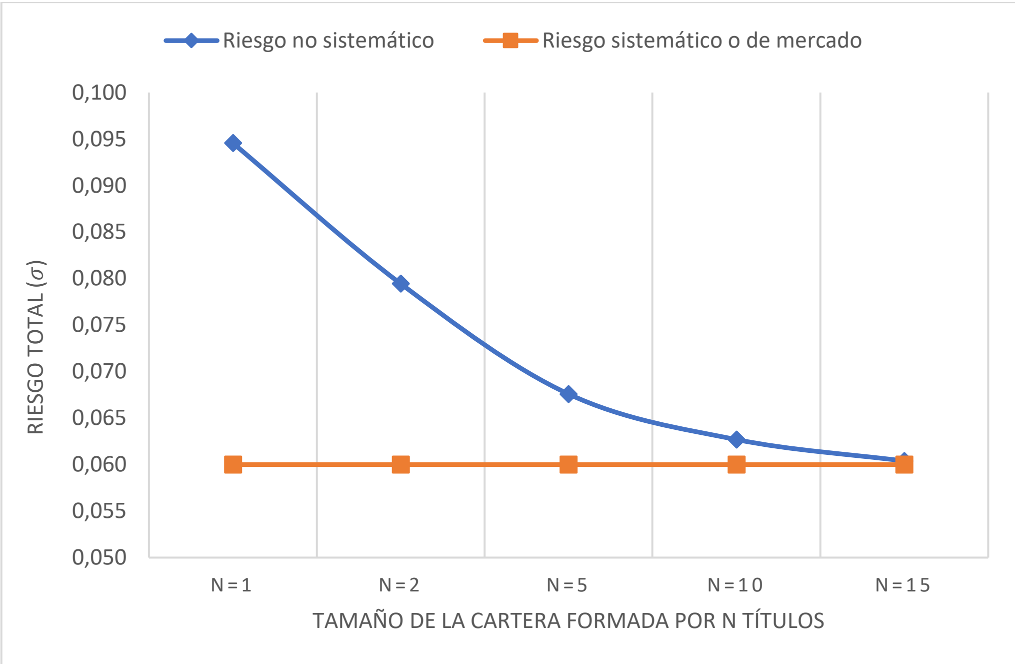

Figura 7. Representación del riesgo total como función de la suma de las desviaciones típicas (σ) del IBEX 35 y del promedio de carteras de cada tamaño N

En primera instancia, la Figura 7 muestra unas conclusiones similares a las que se han obtenido en el desarrollo del trabajo: un aumento de títulos disminuye el porcentaje de riesgo no sistemático en la cartera. Sin embargo, la realidad es que, tal y como mencionaron Surz y Price (2000), esta manera de representar la distribución de riesgo en una cartera de inversión no es la correcta. Analizando las conclusiones que arrojan los resultados de la Tabla X, de haberse evaluado de esta manera, una cartera formada por N = 10 títulos ya eliminarían en promedio el 96% de riesgo diversificable y una formada por N = 15 títulos, el 99%. Sin embargo, incrementar la diversificación no es lo mismo que reducir el riesgo (Whitby, 2019).

Tabla 2. Presentación del riesgo sistemático o de mercado según Fisher y Lorie (1970) como una constante de la desviación típica del IBEX 35. Cálculo de este componente del riesgo sobre el total

Tamaño de la cartera	Riesgo total (σ)	Riesgo sistemático	% Riesgo sistemático s/total
N=1	0,095	0,060	63%
N=2	0,079	0,060	76%
N=5	0,068	0,060	89%
N=10	0,063	0,060	96%
N=15	0,060	0,060	99%

Por el contrario, la Figura 8 ilustra una manera que resultaría más correcta a la hora de calcular los beneficios de la diversificación de carteras, utilizando un método más adecuado. En el Gráfico 8 el comportamiento es prácticamente idéntico al del Gráfico 7 y se observa cómo el riesgo no sistemático va disminuyendo a medida que aumenta el número de títulos en las carteras. Cabe destacar que, cómo se observa en ambos gráficos, el comportamiento es asintótico y la curva empieza a estabilizarse en las carteras entre 10-15 títulos.

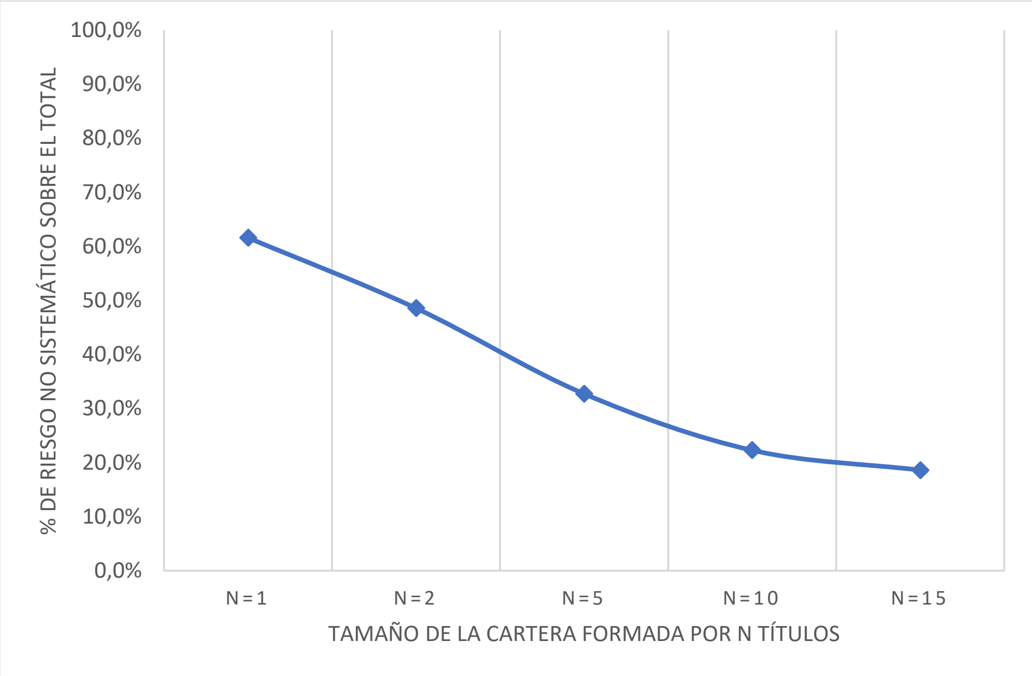

Figura 8. Representación de la disminución de riesgo no sistemático o diversificable a medida que aumenta el tamaño de la cartera

Como muestra la Tabla 3, esta diversificación es menor que la que se obtendría evaluando el riesgo de la forma anterior y en lugar de, por ejemplo, eliminar un 99% del riesgo no sistemático con una cartera formada por N = 15 títulos, se eliminaría un

81,6%. Por lo consiguiente, en este aspecto se coincide con las conclusiones obtenidas por Surz y Price (2000).

Tabla 3. Presentación de la diversificación del riesgo sistemático o de mercado según la metodología aplicada en este trabajo mediante el cálculo del R^2

Tamaño de la cartera	Riesgo total	Riesgo sistemático	Riesgo no sistemático
N=1	100%	38,4%	61,6%
N=2	100%	51,5%	48,5%
N=5	100%	67,3%	32,7%
N=10	100%	77,7%	22,3%
N=15	100%	81,4%	18,6%

Uno de los objetivos planteados en este trabajo ha sido el de analizar si a medida que se aumenta el número de títulos en carteras aleatorias, la β de estas se mantiene estable en el tiempo. Por tanto, se va a comprobar si para el periodo 2009-2020 la estacionariedad de la β mejora cuando aumentan el número de títulos de la cartera.

Con el fin de analizar en qué medida el aumento de títulos en una cartera no sólo disminuye el riesgo sistemático de una cartera, si no que aumenta la estacionariedad de las Betas de esta, y, por tanto, la estabilidad de la cartera, se ha aplicado el método introducido por Tole (1981). Sin embargo, aunque este autor realiza los cálculos en un plazo más corto, en este trabajo se han dividido los 12 años en dos periodos de 6 años.

El estudio de Tole fue llevado a cabo a raíz de la necesidad de comprobar que, tal y como sugiere la teoría de inversión, la β es una medida adecuada del riesgo de las carteras, una vez se ha eliminado el riesgo no sistemático. Una de las preocupaciones latentes respecto a este tema es que el valor de la β podría no ser estacionario y fluctuar en el tiempo.

Esto supondría que el riesgo de una cartera bien diversificada podría variar entre un periodo de tiempo y otro. Porter y Ezzell (1975) estudiaron el comportamiento de la β creando carteras de manera aleatoria, concluyendo que sus resultados eran fruto de su elección del método implementado y no del aumento de N.

Como hemos explicado anteriormente, en el Capital Asset Pricing Model (CAPM) se define la variable β, como medida para evaluar la exposición de un activo al riesgo sistemático. Por lo tanto, con esta fórmula, se han calculado las Betas promedio de dos periodos de 6 años de 100 carteras formadas por 1, 2, 5, 10 y 15 títulos.

Tole (1981) afirma que para que una Beta (β) se pueda considerar estacionaria, es decir, invariable en el tiempo, se deben cumplir dos condiciones:

Condición 1: La Beta (β) histórica o (*ex-post)* tiene que aproximarse de manera adecuada a la Beta de periodos futuros (*ex-ante*). Por el contrario, los inversores no podrían utilizarla con fiabilidad como predictor de riesgo futuro.

Condición 2: Dado un horizonte temporal, el valor de la Beta (β) en el futuro debe mantenerse entre determinados límites que podrían considerarse aceptables para los inversores ya que, de no ser así, la cartera podría cambiar de tipo de riesgo.

Una de las hipótesis planteadas por Tole (1981) es que la estacionariedad de la Beta aumenta cuando la desviación típica disminuye. Por tanto, se va a comprobar si para dos periodos de 6 años, entre el 2009-2020 la estacionariedad de la β mejora y su desviación típica disminuye cuando aumentan el número de títulos de una cartera formada aleatoriamente.

Para comprobar la primera condición, se ha calculado el cambio porcentual promedio del valor de las Betas de un periodo a otro con la siguiente fórmula:

$$\Delta\bar{\beta} = \left|\frac{(\bar{\beta}_2 - \bar{\beta}_1)}{\bar{\beta}_1}\right| \tag{12}$$

Donde:

$\bar{\beta}_1$ representa la Beta histórica o *ex-post* que recoge el promedio de las Betas entre los 6 primeros años (2009-2014)

$\bar{\beta}_{2-}$ representa la Beta futuro o *ex-ante* que recoge el promedio de las Betas entre los 6 primeros años (2015-2020)

Tabla 4. Variación porcentual de las betas según el tamaño de la cartera entre dos periodos temporales de 6 años

Tamaño de la cartera	% cambio Beta promedio	Máximo	Mínimo
1	40,9%	79,8%	2,1%
2	22,7%	115,9%	2,7%
5	12,5%	31,7%	0,01%
10	7,8%	24,2%	0,4%
15	5,7%	18,9%	0,3%

Como puede observarse en la Tabla 4, el cambio promedio de la Beta en carteras formadas por un título es del 41%, mientras que, a medida que se van añadiendo títulos, este cambio se va estabilizando hasta llegar a ser del 5,78% únicamente en carteras formadas por N=15 títulos.

Para comprobar la segunda condición, se ha calculado la desviación típica del promedio de las Betas (β) *ex-ante* de las carteras. A continuación, se han calculado los intervalos de confianza del 95% entre los que esperamos que se encuentre el verdadero valor de la Beta (β).

Atendiendo al valor promedio de la Betas (β) *ex-ante*, se puede comprobar cómo sus valores a medida que aumentan los títulos se mantienen prácticamente constantes. Sin embargo, como cabe esperar, tanto la desviación típica como el intervalo de confianza entre el que se encuentra el valor de la Beta (β), se van estrechando a medida que van aumentando el número de títulos de la cartera. Por tanto, se puede concluir que, si por ejemplo, un inversor elige una cartera de 10 títulos, cuya Beta (β) promedio es del 1,05, puede estar seguro al 95% de que el valor de esa Beta (β) se encontrará entre 0,68 y 1,10.

Tabla 5. Presentación de la desviación típica e intervalos de confianza superior e inferior de las betas ex-ante con un nivel de confianza del 95% según el tamaño de la cartera

Tamaño de la cartera	Desviación Tipica	Promedio del valor Beta	Intervalo de confianza
1	0,410	0,904	1,61-0,18
2	0,283	0,926	1,39-0,46
5	0,185	0,913	1,18-0,55
10	0,111	0,913	1,10-0,68
15	0,082	0,900	1,04-0,74

Tal y como se ha comentado, el Gráfico 9 muestra claramente cómo los valores promedio se mantienen claramente similares mientras que los intervalos son cada vez menores a medida que aumenta el tamaño de la cartera.

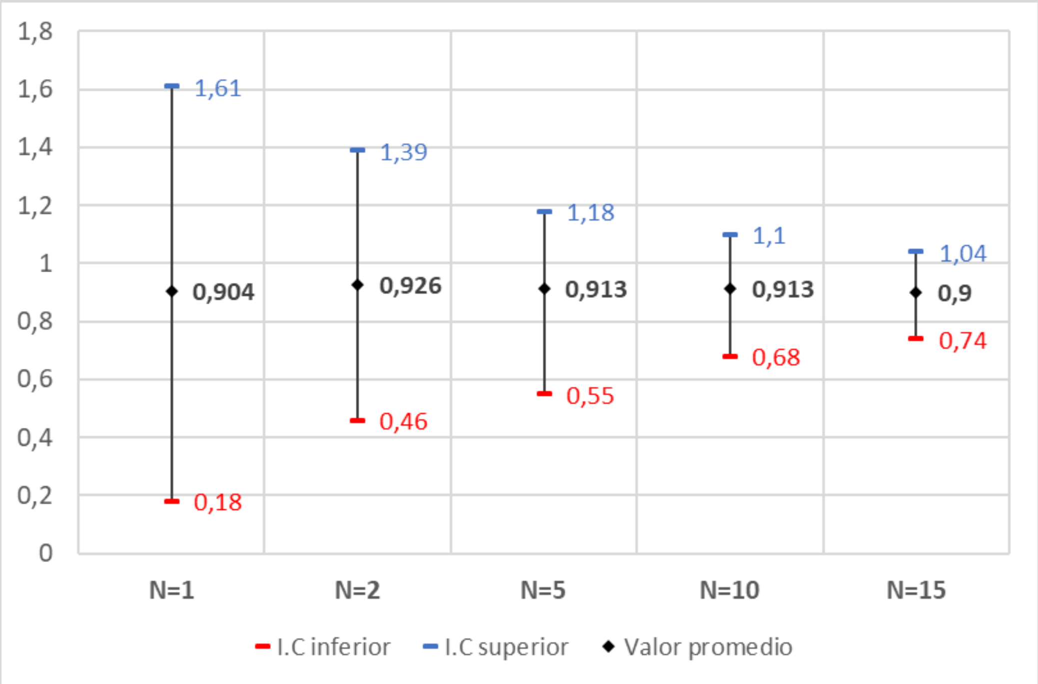

Figura 9. Intervalos de confianza para los valores de las betas *ex-ante* para un nivel de confianza del 95%

6. Conclusiones

A lo largo de este estudio se ha podido comprobar cómo evolucionan los beneficios de la diversificación en carteras formadas aleatoriamente por varios títulos. Como muestra el objetivo principal, el fin último de este trabajo es comprobar cómo un aumento de títulos disminuye el riesgo de la cartera y cómo evolucionan los beneficios de la diversificación.

En primer lugar, se puede concluir que, en la construcción de carteras formadas por acciones del IBEX 35, la inclusión de 1 título entre carteras de N=1 y N=2 lleva aparejada una eliminación adicional de riesgo no sistemático del 33,93%. Mientras que, a medida que se van aumentando los títulos, la reducción empieza a ser más marginal hasta el punto de que un aumento de 5 títulos entre las carteras de N=5 y de N=10 supone la eliminación de la mitad del riesgo anterior, un 15,51% y la suma de 5 títulos más, apenas un tercio de éste último, 4,72% concretamente. Por tanto, se puede afirmar que, dando respuesta al segundo objetivo específico, a partir de 10 títulos podría considerarse que los beneficios de la diversificación empiezan a agotarse en carteras formadas por acciones del IBEX 35, ya que la inclusión de 5 títulos más no conlleva una reducción significativa en el riesgo.

Además, tal y como menciona Solnik (1974), puede afirmarse que las discrepancias en las conclusiones entre algunos autores y este trabajo, existen a raíz de la diferencia entre mercados bursátiles y distintos tamaños de población. Por ello, aunque se mida el riesgo sistemático con el R^2, las conclusiones a las que llega este trabajo no son las mismas a las que llegan Surz y Price (2000) cuyo método es el mismo pero realizado sobre la New York Stock Exchange (NYSE).

Por otro lado, también se puede concluir que estas diferencias pueden surgir a raíz del método aplicado y de la interpretación del riesgo de cada autor. Como se ha comprobado en este trabajo con los datos del IBEX 35, la aplicación del método de Fisher y Lorie (1970) demuestra una divergencia con los resultados obtenidos a partir de la metodología de este trabajo. Por lo consiguiente, aún mostrando la misma tendencia y conclusiones respecto a los beneficios de la diversificación, los resultados no son exactamente los mismos. Según el método de Fisher y Lorie (1970) 15 títulos eliminarían de promedio el 99% de riesgo no sistemático frente al 81,4% que se elimina realmente. Por lo tanto, su método daría unos resultados más optimistas aunque más alejados de la realidad.

En cuanto a la dispersión de los valores obtenidos en las cada una de las carteras que forman el promedio de valores en las carteras de N=1, 2, 5, 10 y 15, se ha podido observar como ésta iba disminuyendo y los valores iban confluyendo a medida que se aumentaba el número de títulos.

Cómo se ha analizado en el último apartado del trabajo, otro aspecto importante valorado por el inversor a la hora de elegir con qué títulos formar una cartera es, el parámetro Beta (β). En el último apartado, como estudio adicional, se ha abordado el efecto del aumento de títulos en la cartera sobre la estabilidad de la beta. La conclusión es que, aunque su valor promedio apenas varíe, la estabilidad de la beta de una cartera aumenta a medida que se incluyen nuevos títulos. Con ello, la desviación típica de la cartera y los intervalos entre los que se puede encontrar el verdadero valor de la beta disminuye.

Como consecuencia, puede afirmarse que la diversificación de carteras no solo contribuye a una disminución del riesgo no sistemático o diversificable de la cartera, sino que favorece a una mayor estabilidad de la Beta (β).

Bibliografía

Banco Santander (s.f). ¿Qué es el IBEX 35? https://www.bancosantander.es/glosario/ibex-35

Bolsa de Madrid (2021). Normas técnicas para la composición y cálculo de los Índices IBEX y de estrategia sobre acciones administrados por Sociedad de Bolsas, S.A. https://www.bolsamadrid.es/docs/SBolsas/docsSubidos/NormasIndices/Normas_Indices_Ibex_esp.pdf

Evans, J. & Archer, S. (1968). Diversification and the reduction of dispersion: an empirical analysis. The Journal of Financ. 23(5), 761-767 https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1540-6261.1968.tb00315.x

Fisher, L. & Loire, J.H. (1970). Some studies of variability of returns on investments in common stocks. The Journal of Business 43(2), 99-134. https://www.jstor.org/stable/2352105

García, F., González-Bueno, J., Guijarro, F., Oliver, J. & Tamosiuniene, R. (2020). Multiobjective approach to portfolio optimization in the light of the credibility theory. Technological and Economic Development of Economy 26(6), 1165-1186, doi: https://doi.org/10.3846/tede.2020.13189

García, F., Guijarro, F., & Moya, I. (2011). The curvature of the tracking frontier: A new criterion for the partial index tracking problem. Mathematical and Computer Modelling 54(7-8), 1781-1784, doi: https://doi.org/10.1016/j.mcm.2011.02.015

García, F., Guijarro, F., & Moya, I. (2013). A multiobjective model for passive portfolio management: An application on the S&P 100 index. Journal of Business Economics and Management 14(4), 758-775, doi: https://doi.org/10.3846/16111699.2012.668859

Mangram, M. (2013). A Simplified Perspective of the Markovitz Portfolio Theory. Global Journal of Business Research 7(1), 59-70 https://www.researchgate.net/publication/256034486_A_Simplified_Perspective_of_the_Markowitz_Portfolio_Theory

Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. The Journal of Finance 7(1), 77-91.

Oliver, J. &García, F. (2020). Leading research trends on trading strategies. Finance, Markets and Valuation, 6(2), 27-54, doi: https://doi.org/10.46503/LHTP1113

Porter, R. & Ezzell, J. (1975). A note on the predictive ability of beta coefficients. Journal of Business Research 3(4), 365-372, doi: https://doi.org/10.1016/0148-2963(75)90017-X

Sharpe, W. (1964). Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk, Journal of Finance 19(3), 425-442.

Solnik, B.H. (1974). Why not diversify internationally rather than domestically? Financial Analysts Journal, 48-54, doi: https://doi.org/10.2469/faj.v30.n4.48

Statman, M. (1987). How many stocks make a diversified portfolio? The Journal of Financial and Quantitative Analysis 22(3), 353-363, doi: https://doi.org/10.2307/2330969

Surz, R. & Price, M. (2000). The Truth about Diversification by the Numbers. The Journal of Investment 9(4), 93-95, doi: https://doi.org/10.3905/joi.2000.319444

Tang, G. (2004). How efficient is a naïve portfolio diversification? An educational note. Omega 32(2), 155-160, doi: https://doi.org/10.1016/j.omega.2003.10.002

Tole, T. (1981). How to maximize stationarity of beta. The Journal of Portfolio Management 7(2), 45-49, doi: https://doi.org/10.3905/jpm.1981.408787

Wagner, W. & Lau, S. (1971). The Effect of Diversification on Risk. Financial Analysts Journal 27(6), 48-56, https://www.jstor.org/stable/4470866

Whitby, J. (2019). The illusion of diversification: The myth of the 30 stock portfolio. Investopedia, 2 de Agosto 2020, https://www.investopedia.com/articles/stocks/11/illusion-of-diversification.asp